

Implementación en el paquete estadístico R de cartas de control para el monitoreo de procesos en media con datos autocorrelacionados

Joaquín González
jgonzalezb@ut.edu.co

Alex J. Zambrano
ajzambranoc@unal.edu.co

Universidad del Tolima, 2010



Resumen

Las cartas de control estadísticas son gráficas que permiten controlar la o las características de calidad de un proceso industrial o de servicios y son ampliamente usadas en la actualidad. Una condición estándar en la metodología de cartas de control tradicionales es que las observaciones son independientes, sin embargo, muchos procesos de interés en aplicaciones las observaciones pueden estar autocorrelacionadas. Lo anterior, produce en las cartas una proporción alta de falsas alarmas y una detección baja del cambio en el proceso. Varios autores en los últimos 30 años, han abordado dicho inconveniente proponiendo diversas alternativas de solución en la construcción de cartas de control donde se considere la estructura de autocorrelación de los datos. Una de estas alternativas de cartas es dada por Montgomery y Mastrangelo [9, 1991] teniendo en cuenta la estructura de la estadística EWMA y el modelamiento de las observaciones a un ARIMA. En esta comunicación se presenta la implementación de dicha carta apoyado de librerías y rutinas de programación en el paquete especializado R [10, 2009], determinando las ventajas que se tienen en el aspecto de enseñanza-aprendizaje y en el área investigativa en temáticas que se aborden del control de calidad estadístico el uso de la herramienta computacional en mención.



1 Introducción



- 1 Introducción
- 2 Control Estadístico de Procesos con datos autocorrelacionados
 - Efectos de autocorrelación en los datos
 - Propuestas de Cartas de Control para datos autocorrelacionados
 - Modelos ARMA(p,q) estacionarios
 - Carta EWMA para datos autocorrelacionados
 - Carta de residuales para datos autocorrelacionados



- 1 Introducción
- 2 Control Estadístico de Procesos con datos autocorrelacionados
 - Efectos de autocorrelación en los datos
 - Propuestas de Cartas de Control para datos autocorrelacionados
 - Modelos ARMA(p,q) estacionarios
 - Carta EWMA para datos autocorrelacionados
 - Carta de residuales para datos autocorrelacionados
- 3 Comparación ilustrativa de las dos cartas



- 1 Introducción
- 2 Control Estadístico de Procesos con datos autocorrelacionados
 - Efectos de autocorrelación en los datos
 - Propuestas de Cartas de Control para datos autocorrelacionados
 - Modelos ARMA(p,q) estacionarios
 - Carta EWMA para datos autocorrelacionados
 - Carta de residuales para datos autocorrelacionados
- 3 Comparación ilustrativa de las dos cartas
- 4 Conclusiones



- 1 Introducción
- 2 Control Estadístico de Procesos con datos autocorrelacionados
 - Efectos de autocorrelación en los datos
 - Propuestas de Cartas de Control para datos autocorrelacionados
 - Modelos ARMA(p,q) estacionarios
 - Carta EWMA para datos autocorrelacionados
 - Carta de residuales para datos autocorrelacionados
- 3 Comparación ilustrativa de las dos cartas
- 4 Conclusiones
- 5 Referencias



Contenido

- 1 Introducción
- 2 Control Estadístico de Procesos con datos autocorrelacionados
 - Efectos de autocorrelación en los datos
 - Propuestas de Cartas de Control para datos autocorrelacionados
 - Modelos ARMA(p,q) estacionarios
 - Carta EWMA para datos autocorrelacionados
 - Carta de residuales para datos autocorrelacionados
- 3 Comparación ilustrativa de las dos cartas
- 4 Conclusiones
- 5 Referencias



Contenido

- 1 Introducción
- 2 Control Estadístico de Procesos con datos autocorrelacionados
 - Efectos de autocorrelación en los datos
 - Propuestas de Cartas de Control para datos autocorrelacionados
 - Modelos ARMA(p,q) estacionarios
 - Carta EWMA para datos autocorrelacionados
 - Carta de residuales para datos autocorrelacionados
- 3 Comparación ilustrativa de las dos cartas
- 4 Conclusiones
- 5 Referencias



Los supuestos usuales que suelen citarse para justificar el uso de las cartas de control son que los datos generados por el proceso cuando está bajo control tienen una distribución normal e independiente con media μ y desviación estándar σ . Tanto μ como σ se consideran fijas y desconocidas. Una condición fuera de control es un corrimiento de μ ó σ (o en ambas) a algún valor diferente. Por lo tanto podría decirse que cuando el proceso está bajo control la característica de la calidad en el tiempo t , X_t , está representada por el modelo

$$X_t = \mu + \epsilon_t \quad t = 1, 2, \dots$$

donde $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$. Acostumbra llamársele el **modelo de Shewhart** del proceso (Montgomery [8, 2004]).



Desafortunadamente, el supuesto de las observaciones no correlacionadas o independientes no esta siquiera cerca de satisfacerse en algunos procesos de manufactura. Ejemplos incluyen los procesos químicos donde con frecuencia las mediciones consecutivas de las características del proceso o presentan un alto grado de correlación, o los procedimientos automatizados de prueba e inspección, donde cada característica de la calidad se mide en cada unidad en el orden temporal de la producción. Básicamente, en todos los procesos de manufactura actúan elementos inerciales, y cuando en intervalo entre las muestras se hace pequeño respecto de estas fuerzas, las observaciones del proceso estarán correlacionadas con el tiempo.



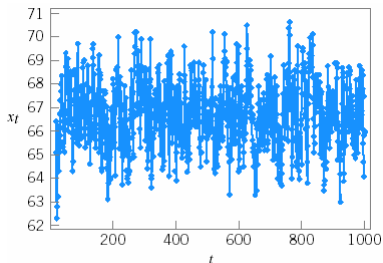


Figura: Variable de un proceso con autocorrelación

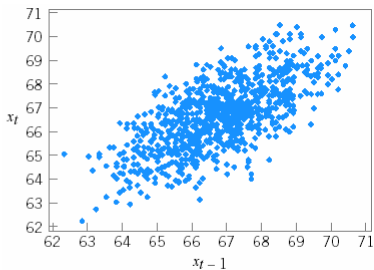


Figura: Gráfica de dispersión de X_t contra X_{t-1}



Montgomery [8, 2004] muestra un ejemplo en el cual un sistema simple que consta de un tanque con volumen V , donde los flujos de entrada y salida del material tienen una velocidad f . Sea w_t la concentración de cierto material en el flujo de entrada en el tiempo t y sea X_t la concentración correspondiente en el flujo de salida en el tiempo t . Suponiendo la homogeneidad dentro del tanque, la relación entre X_t y W_t es

$$X_t = W_t + T \frac{dX_t}{dt}$$

donde $T = V/f$ suele llamársele la **constante de tiempo** del sistema. Si el flujo de entrada experimenta un corrimiento de paso de W_0 en el tiempo $t = 0$ (por ejemplo), entonces la concentración de la salida en el tiempo t es

$$X_t = W_0 (1 - e^{-t/T})$$

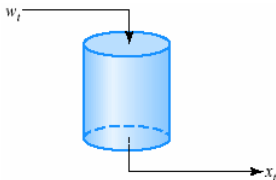


Figura: Tanque con volumen V y flujos de entrada y salida de material



Ahora bien, en la práctica la observación que se hace de X_t no es continua, sino sólo en intervalos de tiempo pequeños con el mismo espaciamento Δt . En este caso,

$$\begin{aligned} X_t &= X_{t-1} + (W_t - X_{t-1}) (1 - e^{-\Delta t/T}) \\ &= \alpha W_t + (1 - \alpha) W_{t-1} \end{aligned}$$

donde $\alpha = 1 - e^{-\Delta t/T}$.

Las propiedades de la concentración del flujo de salida X_t depende de las propiedades de la concentración del flujo de entrada W_t , y del intervalo de muestreo Δt . Si se supone que las W_t son variables aleatorias no correlacionadas, entonces la correlación entre valores sucesivos de X_t (o la autocorrelación entre X_t y X_{t-1}) está dada por

$$\rho = 1 - \alpha = e^{-\Delta t/T}$$

Obsérvese que si Δt es mucho mayor que T , $\rho \simeq 0$. Es decir, si el intervalo entre las muestras Δt en el flujo de salida es largo las observaciones de la concentración de la salida no estarán correlacionadas. Sin embargo, no será éste el caso si $\Delta t \leq T$. Por ejemplo, si

$$\Delta t/T = 1,00 \quad \rho = 0,37$$

$$\Delta t/T = 0,50 \quad \rho = 0,61$$

$$\Delta t/T = 0,25 \quad \rho = 0,78$$

$$\Delta t/T = 0,10 \quad \rho = 0,90$$



Es posible hacer la medición analítica del nivel de autocorrelación. La autocorrelación en una serie de observaciones con una orientación en el tiempo (llamadas **series de tiempo**) se mide con la **función de autocorrelación**

$$\rho_k = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t-k})}{V(X_t)} \quad k = 0, 1, \dots$$

donde $\text{Cov}(X_t, X_{t-1})$ es la covarianza de las observaciones que están separadas k periodos de tiempo, y donde se ha supuesto que las observaciones tienen varianzas constantes dadas por $V(X_t)$. Por lo general los valores de ρ_k se estiman con la **función de autocorrelación muestral**:

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (x_t - \bar{x})(x_{t-k} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2} \quad k = 0, 1, \dots, K$$

Como regla general, normalmente es necesario calcular los valores de r_k para unos cuantos valores de k , $k \leq n/4$.

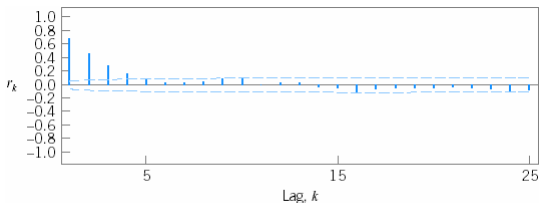


Figura: Función de autocorrelación muestral

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Control Estadístico de Procesos con datos autocorrelacionados
 - Efectos de autocorrelación en los datos
 - **Propuestas de Cartas de Control para datos autocorrelacionados**
 - Modelos ARMA(p,q) estacionarios
 - Carta EWMA para datos autocorrelacionados
 - Carta de residuales para datos autocorrelacionados
- 3 Comparación ilustrativa de las dos cartas
- 4 Conclusiones
- 5 Referencias



La presencia de autocorrelación tiene un profundo impacto en el funcionamiento de las cartas de control usuales, causando un incremento sustancial en la frecuencia de falsas alarmas. Algunas soluciones posibles se han enfocado en las siguientes direcciones

- 1 Muestreo menos frecuente.
- 2 Ajuste en los límites de control existentes.
- 3 Cartas de control basadas en los residuales.
- 4 Otros.



Muestreo menos frecuente

Se sabe que un muestreo menos frecuente puede romper la autocorrelación de los datos del proceso. Para ilustrar, considérese la figura siguiente, que es una gráfica de cada décima observación de la figura anterior. La función de autocorrelación muestral, indica que hay muy poca autocorrelación cuando el desfase es reducido.

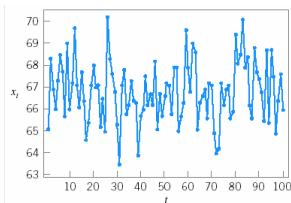


Figura: Gráfica de cada decima observación

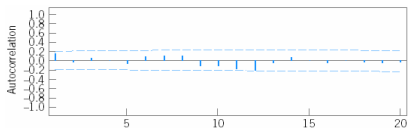


Figura: Función de autocorrelación muestral



Muestreo menos frecuente

Posibles inconvenientes

- 1 Se hace un uso ineficiente de los datos disponibles.
- 2 Puede llevarse mucho más tiempo la detección de un corrimiento real en el proceso que si se usara todos los datos.



Ajuste en los límites de control

Algunas características de estas técnicas consisten en usar las observaciones originales directamente, modificando los parámetros de las cartas de control usuales (termino de varianza en los límites de control) para compensar el efecto de autocorrelación. Esta técnica es particularmente aplicable cuando el nivel de autocorrelación no es extremadamente alto. Algunas referencias a este enfoque son:

- Vam Brackel, L. N., Reynolds, M. R. (1997). EWMA and CUSUM control charts in the presence of correlation. *Commun. Statist.-Simul. Comput.* 26.
- Vasipoulos, A. V., Stamboulis, A. P. (1978). Modification of control chart limits in the presence of data correlation. *J. Qual. Technol.* 10.
- Schmid, W., (1995). On the run length of a Shewhart chart for correlated data, *Statistical papers*, 36.
- Schmid, W., Schone, A. (1997). Some properties of the EWMA control chart in presence of autocorrelation. *Ann. Stat.* 25.



Cartas de control basadas en los residuales

Consisten en generar los residuales de una modelo que puede explicar la correlación en los datos, algunas propuestas están basadas en las siguientes metodologías

- 1 Generar los residuales basados sobre las técnicas de predictores general, como la EWMA.
- 2 Ajustar un modelo de serie de tiempo, como los modelos de promedios móviles autoregresivos (ARMA), a los datos para obtener los residuales.
- 3 Monitorear los residuales del modelo usando cartas de control (los residuales del modelo son independientes si el ajuste del modelo es perfecto).



Cartas de control basadas en los residuales

Algunas referencias a este enfoque son:

- Alwan, L. C., Roberts, H. V. (1988). Time series modelling for statistical process control. *J. Bus. Econ. Statist.* 6:87-95.
- Harris, T. J., Ross, W. H. (1991). Statistical process control procedures for autocorrelated observations. *Canad. J. Chem. Eng.* 69:48-57.
- Montgomery, D. C., Mastrangelo, C. M. (1991). Some statistical process control methods for autocorrelated data. *J. Qual. Technol.* 23:179-204.
- Lu, C. W., Reynolds, M. R. (1999b). EWMA control charts for monitoring the mean of autocorrelated processes. *J. Qual. Technol.* 31:166-188.
- Lu, C. W., Reynolds, M. R. (2001). CUSUM chart for monitoring an autocorrelated process. *J. Qual. Technol.* 33:316-334.
- Lu, C. W., Reynolds, M. R. (1999a). Control chart for monitoring the mean and variance of autocorrelated processes. *J. Qual. Technol.* 31:259-274.



Cartas de control basadas en los residuales

- Harris, T. J., Davies, O. L. (1964). The use of CUSUM techniques for the control of routine forecasts of product demand. *Oper. Res.* 12, 325-333.
- Abraham, B., Kariha, C. P. (1979). Forecast stability and control charts. *ASQC Technical Conference Transactions.* 675-680.
- Alwan, L. C. (1991). Autocorrelation: Fixed Versus Variable control limits. *Quality Engineering.* 1. 167-188.
- Alwan, L. C., Roberts, H. V. (1988). Time-series modeling for statistical process control. *Journal of Business and Economic Statistics.* 6. 87-95.
- Berthouex, P. M., Hunter, W. G., and Pallesen, L. (1978). Monitoring Sewage treatment plants: some quality control aspects. *Journal of Quality Technology.* 10. 139- 149.

Para el desarrollo de nuestro trabajo deseamos implementar algorítmicamente las propuestas de Alwan y Roberts [2, 1988] y la propuesta de Montgomery y Mastrangelo [9, 1991].



Otros trabajos

- Jiang, Tsui y Woodall [5, 2000] proponen una nueva carta de control denominada carta ARMA, basada sobre el monitoreo de la estadística ARMA de las observaciones originales. Las cartas SCC dada por Alwan y Roberts [2, 1988] y EWMAST dada por Zhang [15, 1998], son casos especiales de la carta ARMA. Estudios de simulación muestran que dicha carta es competitiva respecto a las otra cartas mencionadas.
- Sheu y Lu [12, 2008], presentan una carta que es extensión de la carta EWMA, llamada GWMA, la cual sirve para monitorear tanto media como varianza en forma simultánea para datos autocorrelacionados.



Entre las cartas de control basada sobre los residuales se destacan dos formas de abordar esta temática

- 1 Cartas de control especiales SCC, basadas sobre los residuales del modelo que mejor se ajuste a los datos trabajados por Alwan y Roberts [2, 1988], Wardell, Moskowitz y Plante [14, 1992].
- 2 Cartas EWMAST aplicada a la estadística EWMA directamente a los datos autocorrelacionados sin identificar los parámetros del proceso trabajados por Montgomery y Mastrangelo [9, 1991], Schmid [11, 1997], Zhang [15, 1998], Adams y Roberts [1, 1998] y Lu y Reynolds [6, 7, 1999].

Alwan y Roberts [2, 1988] ajustan un modelo de series de tiempo a las observaciones y aplican cartas de control tradicionales al listado de residuales de este modelo, detectando una señal cuando el residual esté fuera de los límites de control.

Según Montgomery y Mastrangelo [9, 1991] si las observaciones están autocorrelacionadas en forma positiva y se ajustan a un miembro de la familia ARIMA, la estadística EWMA con un valor apropiado de λ (constante entre 0 y 1) provee un excelente predictor un paso adelante, además el ajuste se puede realizar a un modelo IMA(1,1), creando con este, una carta de control modificada que posee un buen comportamiento ante datos autocorrelacionados.



Contenido

- 1 Introducción
- 2 Control Estadístico de Procesos con datos autocorrelacionados
 - Efectos de autocorrelación en los datos
 - Propuestas de Cartas de Control para datos autocorrelacionados
 - **Modelos ARMA(p,q) estacionarios**
 - Carta EWMA para datos autocorrelacionados
 - Carta de residuales para datos autocorrelacionados
- 3 Comparación ilustrativa de las dos cartas
- 4 Conclusiones
- 5 Referencias



Cuando los datos presentan estructura de autocorrelación se puede estructurar mediante modelos de promedios móviles autoregresivos:

$$\text{ARMA}(p, q) := \varphi_p(B)X_t = \theta_q(B)Z_t \quad (1)$$

donde $\varphi_p(B) = 1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_p B^p$ es un polinomio autoregresivo de orden p , $\theta_q(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q$ es el polinomio de promedios móviles de orden q , B es el operador de rezago y Z_t es una sucesión de “choques” aleatorios independientes e idénticamente distribuidos con media cero y varianza σ^2 , conocido como ruido blanco [3, Box y Jenkins].



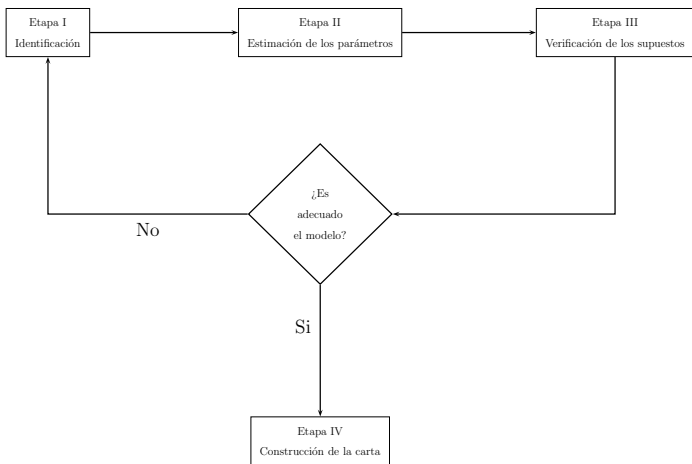


Figura: Pasos de la Metodología Box-Jenkins [3, 1976] para series de tiempo



En la etapa III se calculan los residuales definidos como la diferencia entre un valor observado y su pronóstico un paso adelante, reescalado por la raíz cuadrada del error cuadrático medio (ECM) de la predicción hecha [4]; esto es:

$$\hat{W}_t = \frac{X_t - \hat{P}_{t-1}X_t}{\sqrt{\text{ECM}(\hat{P}_{t-1}X_t)}}, \quad t = 1, 2, \dots, n,$$

donde $\hat{P}_{t-1}X_t$ es el mejor predictor lineal un paso adelante (bajo mínimo ECM) de X_t sobre $\{X_1, X_2, \dots, X_{t-1}\}$. Después de verificar los supuestos en la etapa II se determina que el modelo ajustado es el apropiado, por lo cual $\{\hat{W}_t\}$ debe comportarse aproximadamente como un proceso ruido blanco. El modelo ajustado puede usarse para la construcción de la carta.



Contenido

- 1 Introducción
- 2 Control Estadístico de Procesos con datos autocorrelacionados
 - Efectos de autocorrelación en los datos
 - Propuestas de Cartas de Control para datos autocorrelacionados
 - Modelos ARMA(p,q) estacionarios
 - **Carta EWMA para datos autocorrelacionados**
 - Carta de residuales para datos autocorrelacionados
- 3 Comparación ilustrativa de las dos cartas
- 4 Conclusiones
- 5 Referencias



Supóngase que las observaciones del proceso pueden ser modeladas por un ARIMA(0, 1, 1), cuyo modelo es

$$X_t = X_{t-1} + \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1}.$$

La estadística EWMA dada por

$$Z_t = \lambda X_t + (1 - \lambda)Z_{t-1},$$

con $\lambda = 1 - \theta$ es el pronóstico un paso adelante óptimo para este proceso. Es decir, si $\hat{X}_{t+1}(t)$ es el pronóstico para la observación en el periodo $t + 1$ hecha al final del periodo t , entonces:

$$\hat{X}_{t+1}(t) = Z_t.$$

La secuencia de errores de predicción un paso adelante es:

$$e_t = X_t - \hat{X}_t(t - 1).$$

Que se comporta aproximadamente como un ruido blanco. Si el proceso es modelado por un miembro de la familia ARIMA y las observaciones del proceso en media no tiene cambios tan rápidamente, el EWMA con un apropiado valor de λ (el λ que minimice la suma de cuadrados de los errores de predicción un paso adelante SCE_λ) provee un excelente predictor un paso adelante (Montgomery y Mastangelo [9, 1991]).

Los límites de control de la carta sobre los errores satisfacen la siguiente condición de probabilidad

$$\Pr \left\{ -U_{\alpha/2} \sigma_p \leq X_t - \hat{X}_t(t-1) \leq U_{\alpha/2} \sigma_p \right\},$$

donde $U_{\alpha/2}$ es el cuantil $\alpha/2$ superior de la distribución normal estándar. Pero

$$\Pr \left\{ \hat{X}_t(t-1) - U_{\alpha/2} \sigma_p \leq X_t \leq \hat{X}_t(t-1) + U_{\alpha/2} \sigma_p \right\} = (1 - \alpha),$$

lo que sugiere que el EWMA es un conveniente predictor un paso adelante entonces se puede usar Z_t como la línea central sobre una carta de control para el período $t + 1$ con:

$$LCS_{t+1} = Z_t + U_{\alpha/2} \sigma_p \quad \text{y} \quad LCI_{t+1} = Z_t - U_{\alpha/2} \sigma_p.$$

Y las observaciones X_{t+1} podrían ser comparadas con estos límites, determinando si el proceso está o no bajo control.

Una estimación de σ_p sugerida por Montgomery [8, 2004] es:

$$\hat{\sigma}_p = \sqrt{\frac{SCE_\lambda}{n}}. \quad (2)$$



Contenido

- 1 Introducción
- 2 Control Estadístico de Procesos con datos autocorrelacionados
 - Efectos de autocorrelación en los datos
 - Propuestas de Cartas de Control para datos autocorrelacionados
 - Modelos ARMA(p,q) estacionarios
 - Carta EWMA para datos autocorrelacionados
 - Carta de residuales para datos autocorrelacionados
- 3 Comparación ilustrativa de las dos cartas
- 4 Conclusiones
- 5 Referencias



Supóngase que las observaciones del proceso pueden ser modeladas por un ARMA(p, q), cuyo modelo esta dado en (1). Siguiendo las etapas descritas en la figura 7 se llega al mejor ajuste de los datos, obteniendo las estimaciones de X_t denotadas por \hat{X}_t . También se obtiene los residuales del modelo dados por

$$e_t = X_t - \hat{X}_t.$$

Los límites de control de la carta de residuales sobre los errores satisfacen la siguiente condición de probabilidad

$$\Pr \{ -U_{\alpha/2} \sigma_p \leq X_t - \hat{X}_t \leq U_{\alpha/2} \sigma_p \},$$

donde $U_{\alpha/2}$ es el cuantil $\alpha/2$ superior de la distribución normal estándar. Pero

$$\Pr \{ \hat{X}_t - U_{\alpha/2} \sigma_p \leq X_t \leq \hat{X}_t + U_{\alpha/2} \sigma_p \} = (1 - \alpha),$$

Con esto se obtiene los siguientes limites de control

$$LCS_t = \hat{X}_t + U_{\alpha/2} \sigma_p \quad y \quad LCI_t = \hat{X}_t - U_{\alpha/2} \sigma_p.$$

Y las observaciones X_t podrían ser comparadas con estos límites, determinando si el proceso está o no bajo control. La estimación de σ_p , es:

$$\hat{\sigma}_p = \sqrt{\frac{\sum e_t^2}{n}}.$$



Contenido

- 1 Introducción
- 2 Control Estadístico de Procesos con datos autocorrelacionados
 - Efectos de autocorrelación en los datos
 - Propuestas de Cartas de Control para datos autocorrelacionados
 - Modelos ARMA(p,q) estacionarios
 - Carta EWMA para datos autocorrelacionados
 - Carta de residuales para datos autocorrelacionados
- 3 Comparación ilustrativa de las dos cartas
- 4 Conclusiones
- 5 Referencias



En un primer ejemplo se considera un conjunto de $n = 100$ datos que se simularon mediante el comando `arima.sim` de la librería `tseries` [13] del programa R [10] el cual se ajusta a un modelo de serie tiempo cuyo comportamiento se ve en la figura 8.

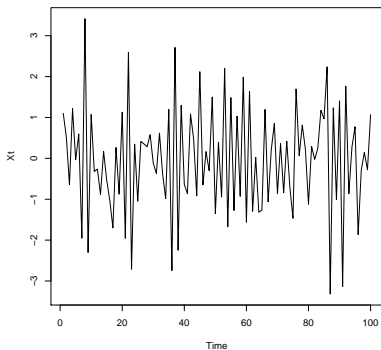


Figura: Serie de tiempo con autocorrelación negativa



De acuerdo a la función de autocorrelación y autocorrelación parcial (Figura 9) se determina que un buen ajuste a los datos es un proceso autoregresivo de orden 1 para una serie estacionaria.

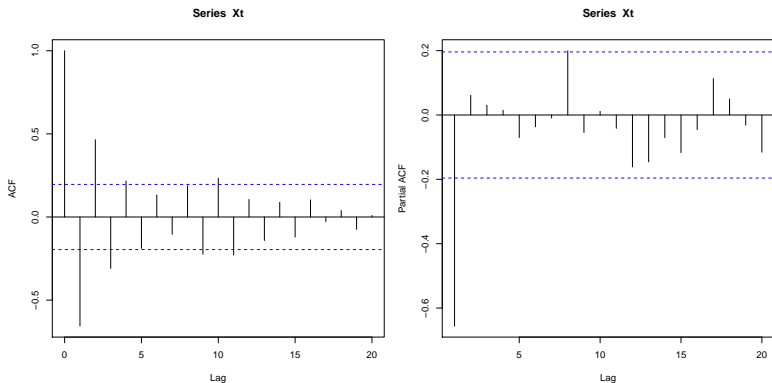


Figura: Función de autocorrelación y de autocorrelación parcial para serie figura 8



En la estimación de los parámetros del modelo, nos indica que los datos se ajustan a un modelo AR(1) dado por $\hat{X}_t = -0,6592X_{t-1}$. Lo cual nos lleva a determinar que la estructura de autocorrelación de los datos es negativa.

```
arima(Xt, order=c(1,0,0))
```

```
Coefficients:
```

	ar1	intercept
	-0.6592	-0.0438
s.e.	0.0747	0.0598
Pr(> t)	<2e-16 ***	0.599

```
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```



Se hace el cálculo de los residuales para realizar la verificación de los supuestos del modelo. Según las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial de los residuales (Figura 10) estos tienen un comportamiento de ruido blanco

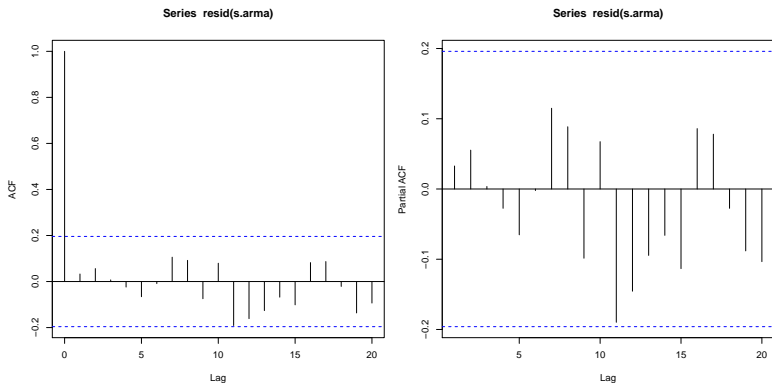


Figura: Funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial de los residuales



Corroborado con las pruebas analíticas de Jarque y Bera para el caso de la normalidad y la prueba Box-Pierce para independencia de los residuales.

```
r←resid(s.arma)

# prueba de normalidad
jarque.bera.test(r)
      Jarque Bera Test

X-squared = 0.0304, df = 2, p-value = 0.985

# prueba de homocedasticidad
Box.test(r)
      Box-Pierce test

X-squared = 0.1073, df = 1, p-value = 0.7433
```



Observando la gráfica CUSUM (Figura 11) los datos poseen un buen ajuste al modelo considerado, mientras que el gráfico CUSUMSQ (Figura 11) nos indica que existe homogeneidad de varianza en los residuales. Luego, se concluye que el modelo al cual se ajustaron los datos es el apropiado.

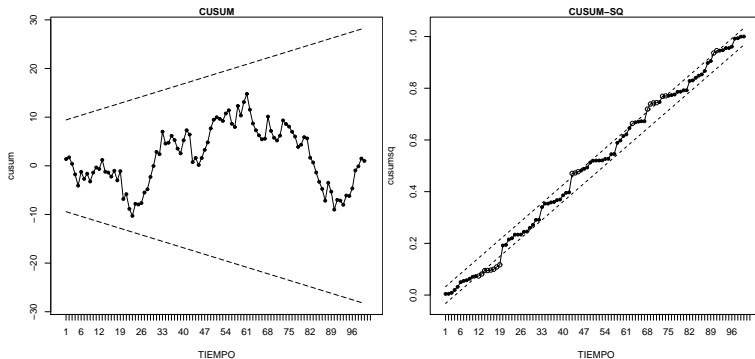


Figura: Gráficos CUSUM y CUSUMSQ de los residuales



Realizando el cálculo de la suma de cuadrados de los residuales descrito en la sección 4, para valores $0 < \lambda \leq 1$, y su representación gráfica se ve en la Figura 12, se determina que el valor de λ que minimiza la suma de cuadrados de los residuales es $\lambda = 0,001$ y con esto se estima σ_p con la ecuación (2) nos da $\hat{\sigma}_p = 1,316614$.

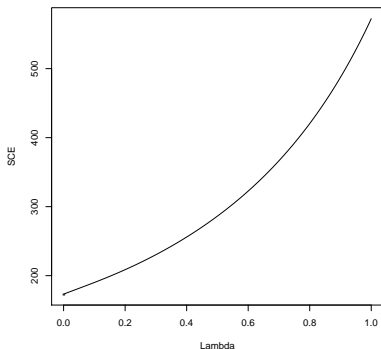


Figura: Suma de cuadrados de residuales



Al tener en cuenta la construcción de las dos cartas descritas en las secciones 4 y 5 se observa que no se tiene un comportamiento similar, debido que la carta propuesta por Montgomery y Mastrangelo [9, 1991] (Figura 13) se distorsiona, mientras que la carta de residuales propuesta por Alwan y Roberts[2, 1988] (Figura 13) su construcción posee límites de control móviles siendo la característica de este tipo de cartas.

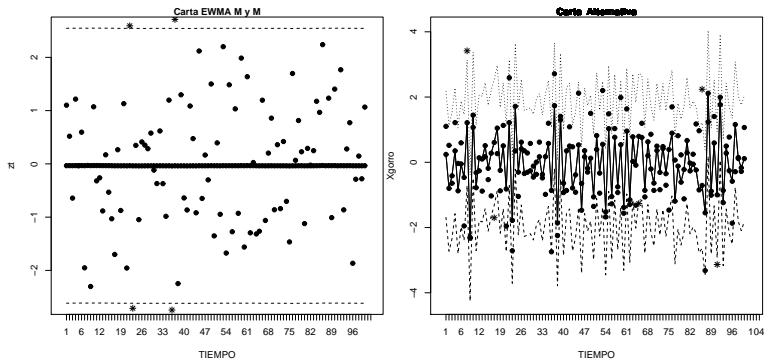


Figura: Cartas de control para datos autocorrelacionados en forma negativa



Haciendo el mismo procedimiento anterior se simulan un conjunto de datos con autocorrelación positiva que se ajustan a un modelo AR(1) con $\hat{\phi} = 0,8$, obteniéndose las cartas de la figura 14, en este caso se observa un comportamiento similar en los dos tipos de cartas consideradas.

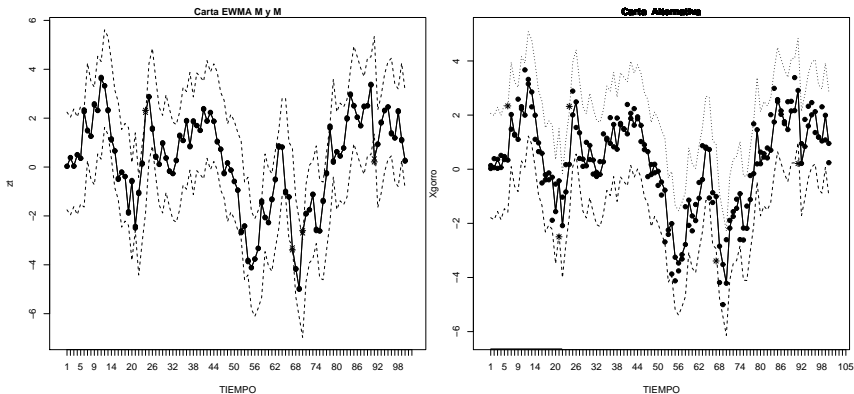


Figura: Cartas de control para datos autocorrelacionados en forma positiva



Contenido

- 1 Introducción
- 2 Control Estadístico de Procesos con datos autocorrelacionados
 - Efectos de autocorrelación en los datos
 - Propuestas de Cartas de Control para datos autocorrelacionados
 - Modelos ARMA(p,q) estacionarios
 - Carta EWMA para datos autocorrelacionados
 - Carta de residuales para datos autocorrelacionados
- 3 Comparación ilustrativa de las dos cartas
- 4 Conclusiones
- 5 Referencias



La Construcción de las cartas se tiene en cuenta la estructura del ajuste de los datos a un modelo en series de tiempo tipo ARMA y de la estadística EWMA. Se consideran los casos cuando la autocorrelación de los datos es positiva y cuando es negativa llegando a las siguientes conclusiones:

- 1 La carta propuesta dada por Alwan y Roberts [2, 1988] no posee inconvenientes ante autocorrelaciones negativas, contrario a lo que sucede con la carta propuesta por Montgomery y Mastrangelo [9, 1991]
- 2 Un inconveniente que puede presentar la construcción de la carta propuesta por Alwan y Roberts [2, 1988] es la identificación del modelo tipo ARMA que mejor se ajuste a los datos, problema no presentado en la carta propuesta por Montgomery y Mastrangelo [9, 1991] ya que esta solo considera un ajuste a un IMA(1, 1) por la naturaleza de la estadística EWMA siempre y cuando la autocorrelación de los datos sea positiva y el cambio en media no sea tan drástico.








Contenido

- 1 Introducción
- 2 Control Estadístico de Procesos con datos autocorrelacionados
 - Efectos de autocorrelación en los datos
 - Propuestas de Cartas de Control para datos autocorrelacionados
 - Modelos ARMA(p,q) estacionarios
 - Carta EWMA para datos autocorrelacionados
 - Carta de residuales para datos autocorrelacionados
- 3 Comparación ilustrativa de las dos cartas
- 4 Conclusiones
- 5 Referencias



Referencias I

-  B. M. Adams and I.-T. Tseng.
Robustness of forecast-based monitoring schemes.
Journal of Quality Technology, 30:328–339, 1998.
-  L. C. Alwan and H. V. Roberts.
Time-series modeling for statistical process control.
Journal of Business and Economic Statistics, 6(1):87–95, 1988.
-  G. E. P. Box and G. M. Jenkins.
Time Series Analysis, Forecasting, and Control.
Holden Day, Oakland, C.A., 1976.
-  P. J. Brockwell and R. A. Davis.
Introduction to Time Series and Forecasting.
Springer-Verlag, New York, 1996.
-  W. Jiang, K.-L. Tsui, and W. H. Woodall.
A new SPC monitoring method: The ARMA chart.
Technometrics, 42(4):399–410, 2000.



Referencias II



C. W. Lu and M. R. Reynolds, Jr.

Control charts for monitoring the mean of autocorrelated the mean and variance processes.

Journal of Quality Technology, 31(3):259–274, 1999.



C. W. Lu and M. R. Reynolds, Jr.

EWMA control charts for monitoring the mean of autocorrelated processes.

Journal of Quality Technology, 31(2):166–188, 1999.



D. C. Montgomery.

Control Estadístico de la Calidad.

Limusa Wiley, México, 3a. edition, 2004.



D. C. Montgomery and C. M. Mastrangelo.

Some statistical process control methods for autocorrelated data.

Journal of Quality Technology, 23(3):179–204, 1991.



R Development Core Team.

R: A Language and Environment for Statistical Computing.

R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2009.

ISBN 3-900051-07-0.



Referencias III



W. Schmid.

On EWMA Charts for Time Series, volume 5.

Frontiers in Statistical Quality Control, Physica-Verlag, 1997.



S.-H. Sheu and S.-L. Lu.

Monitoring autocorrelated process mean and variance using a GWMA chart based on residuals.

Asia - Pacific Journal of Operational Research, 25(6):781–792, 2008.



A. Trapletti and K. Hornik.

tseries: Time Series Analysis and Computational Finance, 2009.

R package version 0.10-22.



D. G. Wardell, H. Moskowitz, and R. D. Plante.

Control charts in the presence of data correlation.

Management Science, 38:1084–1105, 1992.



N. F. Zhang.

A statistical control chart for stationary process data.

Technometrics, 40:24–38, 1998.



Muchas gracias...

